Représentation des droites du plan
Solutions des exemples

►Exemples1:

•1-Soit (d) la droite passant par les points : $A\,(-3;3)\ et\,B\,(3;-1)$.

On considère les vecteurs : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\ et\,\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Q: Parmi ces deux vecteurs, lequel est vecteur directeur de la droite (d)?

Solution:

Rappel : Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ qui partage la même direction que la droite (d).

Pour savoir lequel des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$; $et\,\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de la droite (d), il suffit de savoir lequel d'entre eux est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ (A et B sont des points de la droite d).

On a $A\,(-3;3)\ et\,B\,(3;-1)$ alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-3)\\-1-3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$$

Ainsi on a d'une part : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et d'autre part: $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$$det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}3&6\\-2&-4\end{vmatrix}=3\times(-4)-6\times(-2)=-12+12=0$$

$det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})=0$ Alors $\overrightarrow{u}\ et\,\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite d.

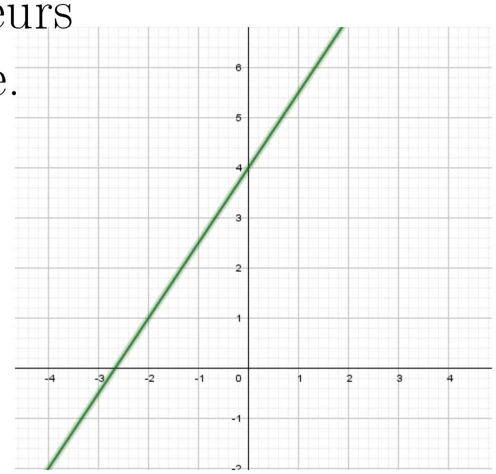
$$det(\overrightarrow{v};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}1&6\\-\frac{1}{2}&-4\end{vmatrix}=(-4)\times1-6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\neq0$$

$\overrightarrow{v}\ et\,\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{v}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite d.

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

.•**2-**Déterminer les coordonnées de deux vecteurs directeur de la droite (d) représentée ci-contre.



Solution:

à partir de la figure on a deux points de la droite: $A(0;4)$ ET $B(-2;1)$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-0 \\ 1-4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite (d).

Tout autre vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$; est un vecteur directeur de la droite (d).

On prend par exemple $k = -1$alors :

$\overrightarrow{u} = (-1) \times \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

►Exemples2:

•**1-**Soit la droite (d) du plan passant par le point $A(-3;3)$, et ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vérifier si le point $B(3;0)$ appartient à (d).

Solution:

$\boxed{\textbf{Rappel: } B \in (d) \Longleftrightarrow det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}) = 0}$

$A(-3;3)$ et $B(3;0) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vérifions si : $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}) = 0$

$det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\times 2 - 6 \times (-1) = -6+6 = 0$

$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{u}$ étant colinéaires alors : $B \in (d)$.

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

•2- Soient les points $A\,(3;-2)$; $B\,(6;4)$; $C\,(2;5)$; $D\,(0;1)$.
Les droites (AB)et (CD) sont-elles parallèles ?

Solution :

Les droites (AB)et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ET $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les coordonnées des points sont :$A\,(3;-2)$; $B\,(6;4)$; $C\,(2;5)$; $D\,(0;1)$ alors :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (-4)\times 3 - 6\times(-2) = -12+12 = 0$

On en déduit que les droites (AB)et (CD) sont parallèles.

▶Exemples3:

•1-Soit l'équation cartésienne de la droite (d): $4x - 2y = 2$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite (d), ainsi que son ordonnée à l'origine.

RAPPEL: Soit (d) une droite du plan ayant pour équation cartésienne:
$ax + by + c = 0$.
Alors (d) admet comme vecteur directeur: $\boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}$.

Solution :

(d): $4x - 2y = 2 \Longleftrightarrow 4x - 2y - 2 = 0$.
Alors : $a = 4;\ b = -2;\ c = -2$
Vecteur directeur de (d): $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
Alors : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$est un vecteur directeur de (d).
L'ordonnée à l'origine est la valeur que prend y lorsque x=0 alors :
$4 \times 0 - 2y = 2 \Longleftrightarrow -2y = 2$
. $\Longleftrightarrow y = -1$
. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

•2-Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A\,(1; -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solution: (d) admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) alors :
$\begin{cases} -b = -1 & \Longleftrightarrow b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$ Ainsi on obtient l'équation : $3x+y+c = 0$

On sait d'autre part que le point $A(1;-1)$ appartient à la droite alors :

Lorsqu'on remplace les coordonnées du point $A(1;-1)$ dans l'équation de la droite d, l'équation sera vérifiée, en effet:

$3 \times x_A + (y_A) + c = 0 \iff 3 \times 1 + (-1) + c = 0$

. $\iff c = -2$

Ainsi :

(d): $3x + y - 2 = 0$

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

•3-Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $A(5;13)$ *et* $B(10;23)$.

Solution:

La droite (d) passe par les points $A(5;13)$ *et* $B(10;23)$

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10-5 \\ 23-13 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

La droite a pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Ainsi : $\begin{cases} -b = 5 \quad \iff b = -5 \\ a = 10 \end{cases}$

Alors : $ax + by + c = 0 \iff 10x - 5y + c = 0$

La droite (d) passe par le point $A(5;13)$ alors :

$10(5) - 5(13) + c = 0 \iff c = -50 + 65$

. $\iff c = 15$

Donc l'équation de la droite (d) est : $10x - 5y + 15 = 0$

▶**Exemple4:**

Les droites d'équations : $3x - y + 5 = 0$ **ET** $-6x + 2y + 7 = 0$ sont-elles parallèles ?

RAPPEL: $(d)//(d') \iff ab' - a'b = 0.$

$3x - y + 5 = 0$ Alors : $a = 3;\ b = -1;\ c = 5$

$-6x + 2y + 7 = 0$ Alors : $a' = -6;\ b' = 2;\ c' = 7$

$$ab' - a'b = 3 \times 2 - (-1)(-6) = 6 - 6 = 0$$

On en conclut que les deux droites sont parallèles.

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

⋈ Equation réduite d'une droite

▶**Exemples5:**

•**1-**Soit la droite (d) d'équation cartésienne $4x + 2y + 3 = 0$.

a-Donner l'équation réduite de la droite (d).

b-Donner un vecteur directeur de cette droite.

Solution:

Une équation réduite est sous la forme : $y = mx + n$ avec $m \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{R}$

a- $4x + 2y + 3 = 0 \iff 2y = -4x - 3$

. $\iff y = -2x - \frac{3}{2}$

b- Pour une équation de droite sous frome réduite, un vecteur directeur s'écrit : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

$m = -2$ alors : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

•2-Le point $A(2;3)$ appartient-il à la droite d'équation $y = 5x - 7$?

Solution :

Pour cela il suffit de vérifier si : $y_A = 5x_A - 7$

$5\left(x_A\right) - 7 = 5\left(2\right) - 7 = 10 - 7 = 3 = y_A$

Alors : $A \in (d)$

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

•3-Soit la droite (d) du plan passant par le point $A\left(3;1\right)$, et ayant comme vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donner l'équation de la droite (d).

Solution :

Rappel : La droite (d) ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors d est parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est sous la forme $x = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

On sait aussi que le point $A\left(3;1\right)$ est un point de la droite.

Alors l'équation de la droite est : $x = x_A \Longleftrightarrow x = 3$.

. ♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠♠

⁎Système de deux equations à deux inconnues:

►Exemple6: Soit (S)le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$

-Résoudre ce système avec deux méthodes.

Méthode 1 :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \cdots (1) \\ x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

L'équation (2) est équivalente à : $x = 6 - 4y$

On remplace l'expression de l'inconnue x en fonction de y dans l'équation (1)

$$\begin{aligned} 2x + y = 5 &\Longleftrightarrow 2(6 - 4y) + y = 5 \\ . \qquad &\Longleftrightarrow 12 - 8y + y = 5 \\ . \qquad &\Longleftrightarrow -7y = 5 - 12 \\ . \qquad &\Longleftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Pour obtenir la valeur de x, on remplace dans l'une des deux équations :

On a : $x + 4y = 6$
Alors : $x + 4(1) = 6$
$\Longleftrightarrow x = 2$

Donc $S = \{(2; 1)\}$

Méthode 2 :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \cdots (1) \\ x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

On multiplie par 2 l'équation (2) ,on obtient :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 8y = 12 \end{cases}$$

On soustrait les deux équations :

$$2x - 2x + y - 8y = 5 - 12$$

$$\iff -7y = -7$$

$$\iff y = 1$$

On remplace la valeur de y dans l'une des deux équations pour obtenir la valeur de x :

$$2x + 1 = 5 \iff 2x = 4$$
$$. \qquad \iff x = 2$$

Donc $S = \{(2; 1)\}$.